229	Suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.	Loi Binomiale.	Escoffier.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

I. Loi de Bernoulli (p.78) .

Def 1: Soit $p \in [0;1]$. X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si:

1) $X(\Omega) = \{0;1\}$

2) $\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$ On note alors $X \sim B(p)$

Contexte usuel: Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on s'intéresse à un événement S appelé "succès". On définit alors l'indicatrice du succès S, qui est la v.a.r.: $X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in S \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ *on a p=P(S).*

Exemple: (source?) Jeu de pile ou face. $\Omega = \{P;F\}$, S={obtenir pile}.

Prop 1: $E(X) = p$, et $V(X) = p(1-p)$.

Remarque: $\forall n \geq 1$, $X^n = X$, facilite le calcul des moments.

Th 1: Th. de Bernoulli.(p.161) Soient des variables de Bernoulli indépendantes, associées à la répétition de la même expérience aléatoire (pour la quelle on s'intéresse à une événement appelé succès et noté S):

$$X_n = \begin{cases} 0 \text{ si à la n° épreuve on a } \overline{S} \\ 1 \text{ si à la n° épreuve on a } S \end{cases}$$

En notant p=P(S), on a$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim B(p)$, et:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\infty]{} p \text{ en probabilités.}$$

Le nombre moyen de succès obtenu aux n premières épreuves tend à se stabiliser autour de p, ie $P(S) \simeq p$. Découle de la loi faible des gds nbres, qui découle Tchebychev.

II. Loi Binomiale (p.78) .

Def 2: Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p si:

1) $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$

2) $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors $X \sim B(n;p)$

Contexte usuel: Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on s'intéresse à un événement S. On note p=P(S). On répète n fois cette expérience aléatoire de manière indépendante, et on appelle X la v.a.r. qui prend pour valeur le nombre de succès obtenus au cours de n réalisations de l'expérience.

Alors $X \sim B(n;p)$.

Exemple: (source?) On répète n fois le m^me lancer de pièce et on compte le nombre de "pile".

Th 2: Somme de variables de Bernoulli indépendantes. (p.107) Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.r. définies sur le même espace, indépendantes, et qui suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre p. Alors leur somme $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $B(n;p)$.

Prop 2: $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Prop 3: Stabilité de la loi binomiale pour la somme. (p.107) Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.r. définies sur le même espace, indépendantes, et telles que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \sim B(n_i;p)$. Alors: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} n_i; p\right)$.

III. Approximations de la loi binomiale.

A. Par la loi de Poisson (p.163).

Th 3: Soit (X_n) une suite de v.a.r. telle que $\forall n \geq 1, X_n \sim B\left(n;\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)$, avec $\lambda>0$ fixé.

Alors la suite (X_n) **converge en loi** vers une variable aléatoire X qui suit une loi de **Poisson P(λ).**

Dans la pratique, pour remplacer une loi binomiale par une loi de Poisson, on prend comme condition $n \geq 30$ et p assez faible (tq $np \leq 5$).

Exemple: (source?) Une dactylo fait en moyenne une faute tous les 500 mots. Quelle est la probabilité qu'elle fasse moins de 5 fautes dans 2000 mots?

B. Par la loi Normale (p.164) .

Th 4: Théorème central limite (admis): Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(on a alors $E(S_n)=n.m$, et $V(S_n) = n\sigma^2$).

Alors la variable S_n centrée et réduite **converge en loi** vers une v.a.r. X qui suit une loi **N(0;1)**, soit:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}.\sigma} \leq x\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Remarque: On n'a pas besoin de connaître la loi des X_n.

Th 5 : Th. de De Moivre-Laplace: Soit (X_i) une suite de **variables de Bernoulli B(p)**, indépendantes. La variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale B(n;p).

Alors la variable centrée réduite $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers X qui suit une loi **N(0;1)**.

La loi N(0;1) est donc une approximation de la loi binomiale centrée réduite.
Dans la pratique, on prend comme condition n≥30 et np(1-p)≥9 pour remplacer une loi binomiale centrée réduite par une loi normale N(0;1).

Exemple: (source?) On joue 2500 fois au jeu de pile ou face. quelle est la probabilité que le nombre de pile soit compris entre 1250 et 1260?

Remarque: S_n étant discrète, S_n^* l'est aussi, et on a donc une suite de v.a.r. discrètes qui converge vers une v.a.r. continue.

IV. Notes.

(1) **Convergence en loi.** Soient (X_n) une suite de var et X une var définies sur le même espace (Ω, $\mathcal{A}$, P). On note, pour tout n, F_n la fonction de répartition de X_n, et F la fonction de répartition de X.
On dit que (X_n) converge en loi vers X si:

$F_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} F(x)$ en tout point de continuité de F.

Ne pas confondre avec:Convergence en probabilités.

Def 9:(231) Soient (X_n) une suite de v.a.r. et X une v.a.r. définies sur la même espace (Ω, $\mathcal{A}$, P) .
On dit que (X_n) **converge vers X en probabilité** si:

$\forall \alpha > 0,\ P(|X_n - X| > \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

La proba d'avoir un écart entre X_n et X supérieur à α tend vers 0 qd n→∞.
On a: (cv en proba) ⇒ (cv en loi), Récipq. fausse.